Leçon 204 - Connexité. Exemples et application.

1. Espaces connexes. —

1. *Connexité.* —

- Def+Pro : Soit X un espace topologique. On a l'équivalence :
  i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$ avec O_i ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.
  ii) Si $X = F_1 \sqcup F_2$ avec F_i fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
  iii) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.
  Dans ce cas, on dit que X est connexe.
- Ex $\mathbb{R}$ est connexe.
- Pro : X est connexe $\Leftrightarrow$ Toute application $f : X \to \mathbb{Z}$ est constante.
- Pro : Si X est connexe et $f : X \to Y$ continue et localement constante, alors f est constante.
- Def : Une partie $A \subset X$ est connexe si elle est connexe pour la topologie induite.
- Ex : $[0, 1]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.
- Contre-Ex : $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$.
- De : Si X est un espace topologique, $M, N \subset X$ sont dites séparées si $(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$.
- Pro : A est une partie connexe de X si : $A = M \cup N$ avec M,N séparées $\Rightarrow M = \emptyset$ ou $N = \emptyset$.
- Thm : Si $A \subset X$, toute partie connexe de X rencontrant $\mathring{A}$ et $X - \overline{A}$ rencontre ∂A.
- Ex : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont convexes, càd des intervalles.
- Pro : Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur X connexe pour laquelle toutes les classes d'équivalence sont ouvertes, alors il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

2. *Stabilité.* —

- Thm : Si X connexe et $f : X \to Y$ continue, alors $f(X)$ est connexe.
- App : Théorème des valeurs intermédiaires : Pour $f : X \to \mathbb{R}$ continue sur X connexe, $f(X)$ est un intervalle.
- Pro : Une union de connexes dont l'intersection est non-vide est connexe.
  Ainsi, $\Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$ muni de la topologie produit est connexe $\Leftrightarrow \forall n$, X_n est connexe.
- Pro : L'adhérence d'un connexe est connexe.
- Contre-ex : Pour $A = [-3, 3] \times [-1, 1]$ et $B = [-1, 1] \times [-3, 3]$, $A^c \cap B$ n'est pas connexe.

3. *Composantes connexes.* —

- Pour X un espace topologique et $x \in X$, la composante connexe de x est $C(x) := \cup_{\text{C connexe tq } x \in C} C$. C'est la plus grande partie connexe de X contenant x.
- Def+Pro : La relation $x \sim y \Leftrightarrow C(x) = C(y)$ est une relation d'équivalence sur X. Ses classes d'équivalence sont appelées les composantes connexes de X.
- Ex : Rayman a 6 composantes connexes.
  L'hyperbole dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $xy = 1$ a deux composantes connexes.
- Pro : Les composantes connexes de X sont fermées dans X, 2 à 2 disjointes.
- Thm : Si $X = \sqcup_{i\in J} O_j$ où les O_j sont des parties connexes ouvertes, alors les O_j sont les composantes connexes de X.
  Si $X = \sqcup_{j\in J} F_j$ où les F_j sont des parties connexes fermées, avec J un ensemble fini, alors les F_j sont les composantes connexes de X.
- App : Théorème de Sierpinski : Un espace métrique compact connexe ne peut être décomposé en une famille infinie dénombrable de fermés disjoints 2 à 2.
- Pro : Un homéomorphisme $h : X \to Y$ envoie une composante connexe de X sur une composante connexe de Y.
- Théorème de Jordan (admis) : Une courbe continue fermée simple γ d'image J est telle que J^c a deux composantes connexes : une bornée C_0 et une non-bornée C_∞ avec $\partial C_0 = \partial C_\infty = J$.

4. *Connexité par arcs.* —

- Def : X est connexe par arcs (cpa) si $\forall a, b \in X$, $\exists \gamma \in [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.
- Pro : Convexe $\Rightarrow$ Etoilé $\Rightarrow$ Connexe par arcs $\Rightarrow$ Connexe.
- Ex : S^n est connexe par arcs.
- Contre-ex : $\overline{\{(x, \sin(\frac{1}{x})),\ x > 0\}}$ est connexe dans $\mathbb{R}^2$ mais pas cpa.
- App : Les parties cpa de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Pro : Si D est un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^n$,$n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - D$ est connexe par arcs.
- Ex : L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ ayant une coordonnée irrationnelle est connexe.
- Pro : Si Ω ouvert d'un evn, Ω connexe $\Rightarrow \Omega$ cpa.

2. Prolongements grâce à la connexité. —

1. *Application à l'analyse réelle.* —

- Théorème de Hadamard-Lévy : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2, de différentielle inversible partout, et telle que $\|f(x)\| \to_{\|x\|\to\infty} +\infty$.
  Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
- Théorème de Darboux : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.
- Pro : Unicité globale de Cauchy-Lipschitz : Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne en sa seconde variable.
  Pour I un intervalle, $t_o \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, et f_1, f_2 définies sur I, vérifiant : $\begin{cases} f_i'(t) = F(t, f_i(t)) \\ f_i(t_0) = y_0 \end{cases}$
  on a alors $f_1 \equiv f_2$ sur I.
- Pro : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable de différentielle nulle en tout point de U.
  Alors f est constante sur chaque composante connexe de U.

2. *Application à l'analyse complexe.* —

– Pro : Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ courbe fermée, C^1 par morceaux, d'image J.
Alors $Ind_\gamma(a) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est bien définie sur J^c, à valeurs entières, et constante sur chaque composante connexe de J^c.
– App : Formule de Cauchy : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, γ courbe fermée C^1 par morceaux dans Ω, d'image J, et $f \in Hol(\Omega)$.
Pour tout $z \in \Omega$ tq $z \notin J$, on a $f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$
– App : Principe du maximum : Pour Ω ouvert connexe et $f \in Hol(\Omega)$, $|f|$ atteint son maximum dans Ω ssi f est constante.
– App : Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout poylnôme de degré ≥ 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.
– Pro : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in Hol(\Omega)$.
L'ensemble des zéros de f dans Ω est soit Ω tout entier, soit un ensemble sans point d'accumumation, au plus dénombrable.
– Cor : Si $f, g \in Hol(\Omega)$ et coïncident sur un ensemble contenant un point d'accumulation, alors $f \equiv g$ sur Ω.
– App : La fonction $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ définie sur $\{Re(z) > 0\}$ admet un unique prolongement holomorphe à $\mathbb{C} - \{-n, nin\mathbb{N}\}$.
– Contre-ex : Pour tous $\alpha \in [-\pi, 0[$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto ln(x)$ se prolonge holom à $\mathbb{C} - \{z \text{ tq } z = r.e^{i\alpha},\ r > 0\}$ par $ln_\alpha(z) = ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z|.e^{i\theta}$, $\theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a ainsi un α tel que $ln_\alpha(z)$ soit bien défini et que ln_α prolonge holomorphiquement ln.
Cependant, pour $\alpha, \beta \in [-\pi, 0[$, ln_α et ln_β ne coïncident que sur la composante connexe de $\mathbb{R}_+^*$ dans l'intersection de leurs ensembles de définition.
Ainsi, aucune de ces fonctions ne peut se prolonger à $\mathbb{C}$ tout entier car
$\lim_{\theta \to \alpha^+}(ln_\alpha(r.e^{i\theta})) \neq \lim_{\theta \to \alpha + 2\pi^-}(ln_\alpha(r.e^{i\theta}))$, $\forall r > 0$.

3. Connexité dans les espaces de matrices. —

– Def : Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie séparée pour laquelle $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,h) \mapsto g.h$ sont continues.
– Ex : Pour toute norme sur $\begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \\ M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$, $Gl_n(\mathbb{C})$, $Sl_n(\mathbb{C})$,$O_n(\mathbb{R})$,$SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes topologiques.
– **Dev** : $SO_3(\mathbb{R})$ est compact, connexe par arcs, et engendré par les retournements. On montre alors que $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.
– Pro : Si G est un groupe topologique et H un sous-groupe connexe tel que G/H est connexe, alors G est connexe.
– Thm : $Gl_n(\mathbb{C})$ est un ouvert connexe par arcs.
$Gl_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs qui sont $det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ et $det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.
$Sl_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
$SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. C'est l'une des composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$.
– Pro : $S_n(\mathbb{R})$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.
– Ex : L'ensemble P des projecteurs de $M_n(\mathbb{C})$ a n+1 composantes connexes qui sont les $P_r := \{\text{projecteurs de rang r}\}$ pour tout $0 \leq r \leq n$.
– **Dev** : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, $C[A]^\times$ est connexe par arcs, et $exp(\mathbb{C}[A]) = C[A]^\times = C[A] \cap Gl_n(\mathbb{C})$.
Ainsi, $exp : M_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective.
– Pro : On a de plus : $exp(M_n(\mathbb{R}) = \{A^2,\ A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$.

Références

G.Lepetit, A.Diez : Plan de leçon.
Queffélec (Topologie) : Connexité, Stabilité, Composantes connexes, Cpa. Th de Hadamard-Lévy, Th de Cauchy-Lipschitz. Indice d'un lacet.
Mneimé, Testard : Groupe topologique, exemples.
Zavidovique : Surjectivite de l'exponentielle(Dev).
Caldero, Germoni (H2G2) : $SO_3(\mathbb{R})$ simple(Dev).
Amar, Matheron : Applications à l'analyse complexe.
Rudin : Applications à l'analyse complexe.
Gourdon : Exemples de connexité. Th de Darboux. Contre-exemple de connexe non cpa.

June 10, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes